

# 基于混合灵敏度矩阵的轴向功能梯度梁的损伤识别\*

林谢星, 吕中荣

(中山大学力学系, 广东 广州 510006)

**摘要:** 提出了一种基于响应灵敏度分析的方法对轴向功能梯度梁进行局部损伤识别。通过对梁的固有频率和加速度响应在数值模拟和测量间的误差的最小化来建立目标函数, 利用罚函数法对该目标函数线性化得到损伤识别的混合灵敏度矩阵。利用该混合灵敏度矩阵进行迭代求解, 最终得到准确的损伤识别结果。以单跨简支梁和两跨连续梁为例, 验证了文中方法的准确性和有效性。该方法的优点是只需要利用几个加速度测量点的短时间响应历程和前几阶固有频率就可以获得准确的识别结果。

**关键词:** 损伤识别; 轴向功能梯度梁; 混合灵敏度矩阵; 模型修正

**中图分类号:** O39 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2017) 01-0041-05

## Hybrid sensitivity matrix for damage identification in axially functionally graded beams

LIN Xiexing, LU Zhongrong

(Department of Applied Mechanics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** This study aims to develop a sensitivity-based approach to identify the local damages in axially functionally graded beams. An objective function is established by minimizing the differences between the calculated and measured natural frequencies, and acceleration responses of the beam. An iterative optimization procedure is conducted by linearizing the objective function based on the penalty function method. A hybrid sensitivity matrix is constructed and used in the finite element model updating. The advantage of the present method lies in only the first several natural frequencies, and a few number of acceleration responses are needed in the identification. A single span simply supported beam and a multi-span beam are studied as two numerical examples to illustrate the correctness and efficiency of the proposed method. Good identified results can be obtained from the short time histories of a few number of measurement points and the first several natural frequencies.

**Key words:** damage identification; axially functionally graded beam; hybrid sensitivity matrix; model updating

近几十年来, 在结构损伤识别和健康监测领域里发展了许多种损伤识别方法。Doebling 等<sup>[1]</sup>通过测试结构动态参数的变化来对结构进行损伤识别。Housner 等<sup>[2]</sup>总结了土木工程结构中控制与健

康监测领域中一些先进的方法。Zou 等<sup>[3]</sup>综述了复合材料结构中损伤识别方法的发展状况。

一般来说, 损伤识别的方法可以分为两类——频域法和时域法。频域法主要是基于固有频率<sup>[4]</sup>,

\* 收稿日期: 2016-06-14

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金 (20130171110039); 广东省自然科学基金 (2015A030313126); 广东省科技计划项目 (2016A020223006)

作者简介: 林谢星 (1991年生), 男; 研究方向: 结构损伤识别; E-mail: linxx29@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 吕中荣 (1975年生), 男; 研究方向: 结构健康监测与损伤识别; E-mail: lvzhr@mail.sysu.edu.cn

模态振型及对应的导数<sup>[5-6]</sup>, 测量的动态柔度系数<sup>[7]</sup>, 频率响应函数<sup>[8]</sup>这些方法。考虑到固有频率具有易于测量和准确性高的特点, 人们常常选取其作为损伤识别的一个动态参数。但是, 如果只是选用固有频率这个参数的话, 在对称结构的损伤识别求解中会出现重根的情况。虽然我们可以在反问题中结合模态振型去解决这个问题, 但是现实中我们很难准确地测量模态振型, 尤其是高阶模态。而且对于频率法还有一个缺陷——模态特性对结构局部损伤不够敏感<sup>[9]</sup>。

时域法是直接通过结构的时域响应来识别结构损伤。Cattarius 等<sup>[10]</sup>通过结构振动响应的时程分析识别了智能结构的损伤。Majumder 等<sup>[11]</sup>提出了一种时域法, 通过分析振动数据对梁结构进行损伤检测。这里的外激励采用的是车辆在桥上移动所产生的荷载。Lu 和 Law 提出基于模型修正的响应灵敏度法并用于结构损伤进行识别<sup>[12-14]</sup>。

近年来, 功能梯度材料以其良好的热力学特性, 在很多方面得到了很好的应用, 比如航天飞机的框架结构, 宇宙飞船的隔热板等<sup>[15]</sup>。许多研究者也基于功能梯度材料的结构进行了广泛的振动分析的研究<sup>[16-17]</sup>。由于大部分的功能梯度材料是应用在比较苛刻的环境下, 所以针对功能梯度材料的准确的条件评估便显得尤为重要。目前, 对于功能梯度材料的损伤识别的研究还相对较少<sup>[18]</sup>。

针对轴向功能梯度材料提出了一种基于灵敏度的局部损伤的识别方法。通过对梁的固有频率和加速度响应在数值模拟和测量间的误差的最小化来建立目标函数, 基于罚函数法得到损伤识别方程的混合灵敏度矩阵, 利用该矩阵进行迭代求解最终可以获得准确的损伤识别结果。本文以单跨简支梁和两跨连续梁为例, 说明所提方法的准确性和有效性。

## 1 理论方法

### 1.1 轴向功能梯度梁模型

本文假设轴向功能梯度梁的杨氏模量和密度沿轴向按如下规律变化

$$E(x) = (E_L - E_R)(1 - x/L)^\vartheta + E_R \quad (1)$$

$$\rho(x) = (\rho_L - \rho_R)(1 - x/L)^\vartheta + \rho_R \quad (2)$$

其中  $E_L$  和  $E_R$  分别表示梁的左端和右端的杨氏模其中  $E_L$  和  $E_R$  分别表示梁的左端和右端的杨氏模量,  $\rho_L$  和  $\rho_R$  分别表示梁的左端和右端的密度。 $\vartheta$  是非负的指数, 描述材料沿着梁轴向的变化情况。

### 1.2 轴向功能梯度梁的自由和受迫振动

轴向功能梯度梁自由振动和受迫振动方程分别

如下:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_s + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_d\mathbf{d} = \mathbf{P}(t) \quad (4)$$

其中  $\mathbf{M}, \mathbf{K}_d, \mathbf{C}$  分别表示的是系统的总质量矩阵, 总刚度矩阵以及阻尼矩阵。 $\ddot{\mathbf{r}}_s, \dot{\mathbf{r}}_s$  为梁节点自由运动的响应,  $\ddot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}$  分别表示梁节点受迫振动的加速度, 速度和位移响应。 $\mathbf{P}(t)$  是外激励矢量, 本文采用 Rayleigh 阻尼模型, 即  $\mathbf{C} = a_1\mathbf{M} + a_2\mathbf{K}$ 。 $a_1, a_2$  是常数, 可通过前两阶固有频率近似构造。

### 1.3 模型修正问题的目标函数

反问题中, 通过对目标函数取最小值来进行优化, 使计算模型与实际结构相符。本文采用的目标函数为:

$$g_1(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{nf} (\hat{\lambda}_p - \lambda_p(\boldsymbol{\alpha}))^T \mathbf{W}_1 (\hat{\lambda}_p - \lambda_p(\boldsymbol{\alpha})) \quad (5a)$$

$$g_2(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^m (\hat{\mathbf{R}}_{ij} - \mathbf{R}_{ij}(\boldsymbol{\alpha}))^T \mathbf{W}_2 (\hat{\mathbf{R}}_{ij} - \mathbf{R}_{ij}(\boldsymbol{\alpha})) \quad (5b)$$

其中  $\lambda_p = \omega_p^2$ , 即固有频率的平方。 $l$  是测点数,  $nt$  是时间采样点数,  $nf$  是特征值数。 $\boldsymbol{\alpha}$  是待识别的损伤参数  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$  的向量形式。 $\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})$  是对应  $\boldsymbol{\alpha}$  的计算响应向量,  $\hat{\mathbf{R}}$  测量的响应向量。 $\mathbf{W}_1$  和  $\mathbf{W}_2$  是对应的特征值和动态响应的权重矩阵, 本文均取为单位矩阵。

### 1.4 模型修正中的混合灵敏度矩阵

利用罚函数法<sup>[19]</sup>, 识别方程可写为:

$$\mathbf{S}_\lambda^j \Delta \boldsymbol{\lambda}^j = \Delta \boldsymbol{\lambda}^j \quad (6a)$$

$$\mathbf{S}_R^j \Delta \mathbf{R}^j = \Delta \mathbf{R}^j \quad (6b)$$

其中

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}^j = \hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}^j(\boldsymbol{\alpha}) \quad (7a)$$

$$\Delta \mathbf{R}^j = \hat{\mathbf{R}}^j - \mathbf{R}^j(\boldsymbol{\alpha}) \quad (7b)$$

分别为第  $j$  次迭代中模拟测量和计算响应间的差值,  $\mathbf{S}_\lambda^j$  是关于损伤参数的固有频率的灵敏度矩阵, 通过 Fox 和 Kapoor 的方法<sup>[20]</sup>可以求得。 $\mathbf{S}_R^j$  是动态响应的灵敏度矩阵, 运用 Lu 等<sup>[13]</sup>提到的方法可以求得。

整合方程 (7a) 和 (7b) 可得

$$\bar{\mathbf{S}}^j \Delta \boldsymbol{\alpha}^j = \Delta \mathbf{H}^j \quad (8)$$

其中  $\bar{\mathbf{S}}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\lambda^j \\ \mathbf{S}_R^j \end{bmatrix}$  即为混合灵敏度矩阵,  $\Delta \mathbf{H}^j = \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\lambda}^j \\ \Delta \mathbf{R}^j \end{bmatrix}$

将方程 (8) 展开得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha^2} & \cdots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha^i} & \cdots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha^{Ne}} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha^2} & \cdots & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha^i} & \cdots & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha^{Ne}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \lambda_{nf}}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial \lambda_{nf}}{\partial \alpha^2} & \cdots & \frac{\partial \lambda_{nf}}{\partial \alpha^i} & \cdots & \frac{\partial \lambda_{nf}}{\partial \alpha^{Ne}} \\ \frac{\partial R_1(t_i)}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial R_1(t_i)}{\partial \alpha^2} & \cdots & \frac{\partial R_1(t_i)}{\partial \alpha^i} & \cdots & \frac{\partial R_1(t_i)}{\partial \alpha^{Ne}} \\ \frac{\partial R_2(t_i)}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial R_2(t_i)}{\partial \alpha^2} & \cdots & \frac{\partial R_2(t_i)}{\partial \alpha^i} & \cdots & \frac{\partial R_2(t_i)}{\partial \alpha^{Ne}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial R_i(t_i)}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial R_i(t_i)}{\partial \alpha^2} & \cdots & \frac{\partial R_i(t_i)}{\partial \alpha^i} & \cdots & \frac{\partial R_i(t_i)}{\partial \alpha^{Ne}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial R_l(t_i)}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial R_l(t_i)}{\partial \alpha^2} & \cdots & \frac{\partial R_l(t_i)}{\partial \alpha^i} & \cdots & \frac{\partial R_l(t_i)}{\partial \alpha^{Ne}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \lambda_1 \\ \Delta \lambda_2 \\ \cdots \\ \Delta \lambda_{nf} \\ \Delta R_1(t_i) \\ \Delta R_2(t_i) \\ \cdots \\ \Delta R_i(t_i) \\ \cdots \\ \Delta R_l(t_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \alpha^1 \\ \Delta \alpha^2 \\ \cdots \\ \Delta \alpha^i \\ \cdots \\ \Delta \alpha^{Ne} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

方程 (8) 可以通过阻尼最小二乘法 (DLS) 求解<sup>[21]</sup>, 表达式为:

$$\Delta \alpha^j = (\bar{S}^{jT} \bar{S}^j + \gamma I) \bar{S}^{jT} \Delta H^j \quad (10)$$

其中,  $\gamma$  是非负阻尼正则化参数。式 (9) 的解等同于对如下函数取最小值

$$J(\Delta \alpha^j, \gamma) = \|\bar{S}^j \Delta \alpha^j - \Delta H^j\|^2 + \gamma \|\Delta \alpha^j\|^2 \quad (11)$$

在本文中, 采用 Tikhonov 正则化方法求解最优正则化参数  $\gamma$ <sup>[22]</sup>。对于第  $j+1$  次迭代的修正损伤参数  $\alpha^{j+1}$  可表示为

$$\alpha^{j+1} = \alpha^j + \Delta \alpha^j \quad (12)$$

收敛准则设定为

$$\max(\Delta \alpha^j) \leq \text{Tol} \quad (13)$$

这里容许值 Tol 取为  $1 \times 10^{-3}$ 。

### 1.5 迭代算法步骤

首先, 给定一组初始的损伤参数向量  $\alpha^0$ , 并设为零向量。迭代过程如下:

步骤 1: 基于初始的损伤参数向量, 通过方程 (3) 和 (4) 在  $j=k+1$  次迭代之后, 求得固有频率和动态响应。误差向量  $\Delta \lambda^k$  和  $\Delta R^k$  则是通过方程 (7) 求得。再由方程 (10) 得到模拟测量和计算响应之间的差值。

步骤 2: 由上一步求得的损伤参数向量  $\alpha^k$  计算在  $j=k+1$  次迭代时的灵敏度矩阵  $S_\lambda^j$ ,  $S_R^j$ 。

步骤 3: 由方程 (12) 算得  $\alpha^{k+1}$ 。

步骤 4: 重复步骤 1 到 3, 直到容许条件 (13) 满足。

## 2 数值模拟

### 2.1 轴向功能梯度梁的损伤识别

如图 1 所示, 本算例的轴向功能梯度梁是在简支边界条件下, 尺寸为  $20 \text{ m} \times 0.4 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ , 由钢和铝组成, 左端为纯钢右端为纯铝, 所用的幂次指数  $\vartheta$  为 0.5, 表 1 是详细的材料参数。通过 MATLAB 软件, 将梁划分为 12 个 2 节点的欧拉伯努利梁单元。未损伤状态下梁的前五阶固有频率为 5.68, 22.91, 51.34, 90.8 和 140.92 Hz。本算例所用的外激励是作用在第七个节点的横向冲击荷载:

$$\begin{cases} F(t) = 10^5(t - 0.02)N & (0.02 \text{ s} < t \leq 0.04 \text{ s}) \\ F(t) = 10^5(0.06 - t)N & (0.04 \text{ s} < t \leq 0.06 \text{ s}) \end{cases}$$

计算动态响应时, 整个时间历程为 2 s, 时间步长取 0.001 s。基于瑞利阻尼模型构建的阻尼系数均取 0.01。损伤识别中采用前 12 阶固有频率以及节点 2, 4, 6, 8, 10 的加速度响应。

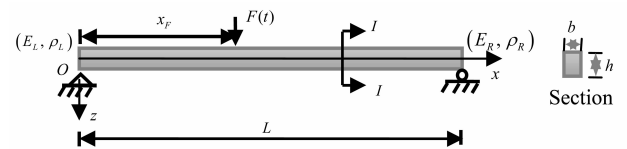


图 1 轴向功能梯度梁

Fig. 1 An axially functionally graded beam

数值模拟是通过单元杨氏模量的减少来模拟局部损伤, 本算例模拟单元 1, 2, 6 和 10 分别出现 5%, 10%, 15% 和 20% 的损伤。不考虑噪声的情况下, 经过 50 次迭代, 成功识别损伤, 最大的误差发生在第七个单元, 只有 0.001 2%, 结果如图 2 所示。最优正则化参数  $\lambda_{opt}$  为 8.888, 迭代过程中典型的 L 型曲线如图 3 所示。本算例很好的验证了本文方法的正确性。

表 1 梁的材料特性

Table 1 Properties of beam in the numerical study

Properties	Steel	Aluminum
$E / \text{GPa}$	210	69
$\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	7 800	2 700

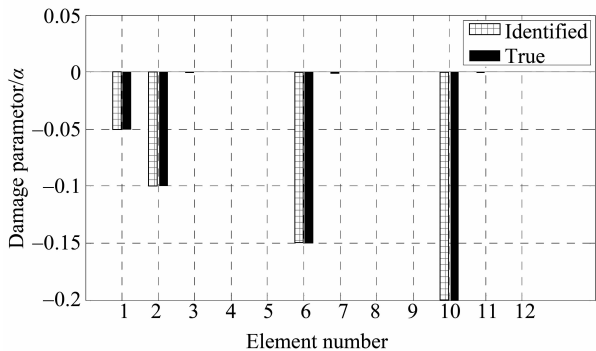


图 2 多损伤的识别结果 (无噪声)

Fig. 2 Results of multiple damage identification (noise free)

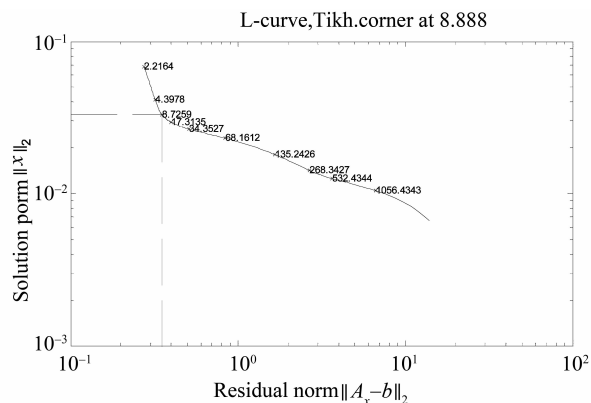


图 3 典型 L 型曲线

Fig. 3 The typical L-curve

为了更好地模拟实际工况,考虑噪声的影响。固有频率取恒定的 0.15% 的噪声,加速度响应依次取 0%, 5% 和 10%。如图 4 所示,随着噪声等级的提高,识别误差有变大的趋势,但识别结果还是令人满意的。在 10% 噪声的水平下最大的识别误差也只是 1.2%,很好的体现了本文方法的正确性和鲁棒性,并且对噪声的影响不敏感,有较好的工程应用潜力。

2.2 两跨连续轴向功能梯度梁的多损伤识别

算例 2 采用的是两跨的连续梁,如图 5 所示。模型尺寸为  $4 \text{ m} \times 0.2 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ ,梁的左端为二氧化锆 ( $\text{ZrO}_2$ ),右端为钛合金 ( $\text{Ti-6Al-4V}$ ),材料参数如表 2 所示。有限元模拟中,将梁划分为 12 个 2 节点的欧拉伯努利梁单元,计算得到的前 6 阶

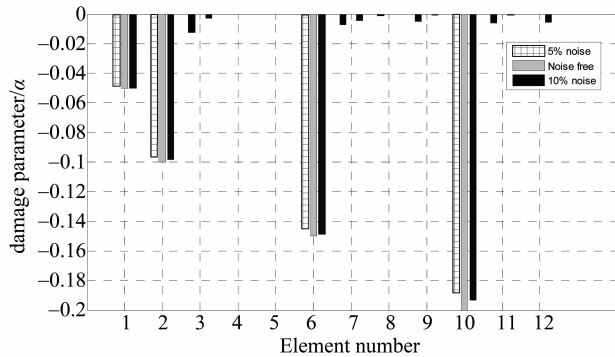


图 4 不同噪声水平下多损伤识别结果

Fig. 4 Results of multiple damage identification under different noise level

固有频率为 66.47, 129.20, 253.04, 432.46, 559.07 和 888.73 Hz。对于受迫振动,所用的外激励是分别作用在第 8 个和第 17 个节点的横向冲击荷载:

$$\begin{cases} F_1(t) = 10^4(t - 0.02)N, (0.02 \text{ s} < t \leq 0.04 \text{ s}) \\ F_1(t) = 10^4(0.06 - t)N, (0.04 \text{ s} < t \leq 0.06 \text{ s}) \\ F_2(t) = 10^4(t - 0.02)N, (0.02 \text{ s} < t \leq 0.04 \text{ s}) \\ F_2(t) = 10^4(0.06 - t)N, (0.04 \text{ s} < t \leq 0.06 \text{ s}) \end{cases}$$

计算动态响应时,时间步长取 0.000 5 s,总的时间历程取 2 s。阻尼系数同样假设为 0.01。损伤识别时,采用前 12 阶的固有频率和节点 3, 5, 8, 13, 15, 16 和 19 的加速段响应。

表 2 梁的材料特性

Table 2 Properties of beam in the numerical study

Properties	$\text{ZrO}_2$	$\text{Ti-6Al-4V}$
$E / \text{GPa}$	168	105
$\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	3 000	4 429

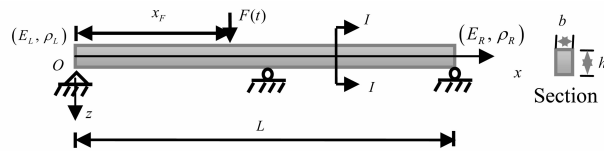


图 5 连续轴向功能梯度梁

Fig. 5 A continuous axially functionally graded beam

本算例中,模拟单元 2, 5, 11 和 14 出现损伤,也即杨氏模量对应减少 10%, 8%, 15% 和 20%。固有频率和加速度响应分别加入 0.15% 和 5% 的噪声。如图 6 所示,经过 150 次迭代后,识别结果收敛,最大的误差仅为 2.22%。其中最优

正则化参数  $\lambda_{opt}$  为 71.81。本算例进一步验证了方法的正确性和有效性。

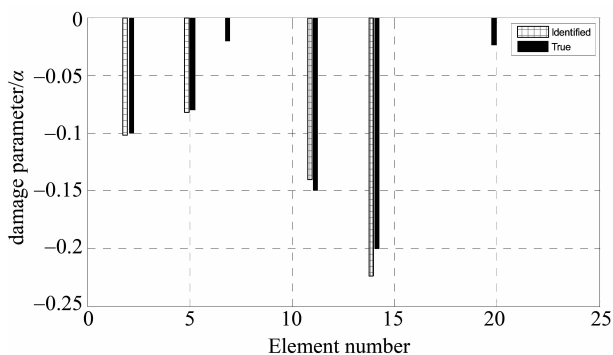


图 6 连续功能梯度梁的多损伤识别结果

Fig. 6 Results of multiple damage identification in a continuous AFG beam

### 3 结 论

本文采用基于混合灵敏度矩阵的有限元模型修正法, 利用罚函数法和 Tikhonov 正则化法对识别方程进行迭代求解。所提的方法在轴向功能梯度梁的损伤识别中体现了有效性和鲁棒性。两个算例表明, 运用此方法, 只需要几个固有频率和很少几个测点的加速度响应就可以得到很好的识别结果, 同时具有较好的抗噪性, 具有较好的工程应用前景。

#### 参考文献:

[1] DOEBLING S W, FARRAR C R, PRIME M B. A review of damage identification methods that examine changes in dynamic properties [J]. *Shock Vibr Dig*, 1998, 30:91 - 105.

[2] HOUSNER G W, BERGMAN L A, CAUGHEY T K, et al. Structural control: Past, present, and future [J]. *J Eng Mech*, 1997, 123:897 - 971.

[3] ZOU T, TONG L, STEVE G P. Vibration based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures-a review [J]. *J Sound Vib*, 2000, 230:357 - 378.

[4] WANG B S, HE Z C. Crack detection of arch dam using statistical neural network based on the reductions of natural frequencies [J]. *J Sound Vib*, 2007, 302:1037 - 1047.

[5] PANDEY A K, BISWAS M, SAMMAN M M. Damage detection from change in curvature mode shapes [J]. *J Sound Vib*, 1991, 145:321 - 332.

[6] WANG H, QIAO P. On irregularity-based damage detection method for cracked beams [J]. *Int J Solids Struct*, 2008, 45: 688 - 704.

[7] JAISHI B, REN W X. Damage detection by finite element model updating using modal flexibility residual [J].

*J Sound Vib*, 2006, 290:369 - 387.

[8] HUANG Q, XU Y L, LI J C. Structural damage detection of controlled building structures using frequency response functions [J]. *J Sound Vib*, 2012, 331:3476 - 3492.

[9] PERRY M J, KOH C G. Output-only structural identification in time domain; numerical and experimental studies [J]. *Earthq Eng Struct Dyn*, 2008, 37(4): 517 - 533.

[10] CATTARIUS J, INMAN D J. Time domain analysis for damage detection in smart structures [J]. *Mech Syst Signal Proc*, 1997, 11(3):409 - 423.

[11] MAJUMDER L, MANOHAR C S. A time domain approach for damage detection in beam structures using vibration data with a moving oscillator as an excitation source [J]. *J Sound Vib*, 2003, 268:699 - 716.

[12] 吕中荣, 徐伟华, 刘济科. 计算模态响应灵敏度的两种方法比较 [J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2009, 48(4): 1 - 4.

LÜ Zhongrong, XU Weihua, LIU Jike. Comparison study on two methods to calculate modal response sensitivities [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2009, 48(4):1 - 4.

[13] LU Z R, LAW S S. Identification of system parameters and input force from output only [J]. *Mech Syst Signal Proc*, 2007, 21:2099 - 2111.

[14] LU Z R, LAW S S. Features of dynamic response sensitivity and its application in damage detection [J]. *J Sound Vib*, 2007, 303(1/2):305 - 329.

[15] JHA D J, KANT T, SINGH R K. A critical review of recent research on functionally graded plates [J]. *Compos Struct*, 2013, 96:833 - 849.

[16] SINA S A, NAVAZI H M, HADDADPOUR H. An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams [J]. *Mater Design*, 2009, 30(3):741 - 747.

[17] ALSHORBGY A E, ELTAHER M A, MAHMOUD F F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method [J]. *Appl Math Model*, 2011, 35:412 - 425.

[18] YU Z G, CHU F L. Identification of crack in functionally graded material beams using the p-version of finite element method [J]. *J Sound Vib*, 2009, 325(1/2):69 - 84.

[19] FRISWELL M I, MOTTERSHEAD J E. *Finite element model updating in structural Dynamics* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1995.

[20] FOX R, KAPOOR M. Rate of change of eigenvalues and eigenvectors [J]. *AIAA J*, 1968, 6:2426 - 2429.

[21] TIKHONOV A M. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization [J]. *Soviet Math*, 1963, 4:1035 - 1038.

[22] HANSEN P C, LEARY D P O. The use of the L-curve in the regularisation of discrete ill-posed problem [J]. *SIAM J Sci Comput*, 1993, 14:1487 - 1503.